

Els models matemàtics són insubornables

Les consideracions matemàtiques abstractes juguen un paper important en les ciències de la natura, la medicina, l'enginyeria, l'economia, les ciències socials i, darrerament, també en les finances. D'aquesta mena de lligams, se n'aprofiten les dues bandes: d'un costat, la matemàtica contribueix a una millor comprensió de fenòmens complexos de l'experiència i, de l'altre, d'aquests contactes, en recull inspiracions per al seu propi desenvolupament. L'autor presenta exemples del seu domini de recerca.

HERBERT AMANN

A mitjan dels anys vint d'aquest segle, el biòleg italià U. D'Ancona va observar que els estats d'equilibri biològics naturals de les poblacions de peixos podien ser modificats per les empreses pescadores. Recerques estadístiques, fetes entre 1910 i 1923, dels mercats de Venècia, Trieste i Fiume, en què es descarregaven pràcticament totes les captures de l'alt Adriàtic, van mostrar fluctuacions considerables en la varietat i freqüència de les espècies pescades. Durant els anys de la guerra, que van ocasionar una reducció considerable de la pesca, va augmentar significativament la proporció de peixos predadors —com ara taurons o rajades—, que viuen de varietats de peix més petites. El nombre de peixos comestibles, en canvi, que viuen d'invertebrats i plantes, i que són la presa dels depredadors, va minvar. D'Ancona va concloure que la reculada de les flotes de pesca en el període 1914-1918 havia dislocat passatgerament l'equilibri biològic de l'alt Adriàtic a favor dels predadors, però, per altra banda, no va saber donar una explicació satisfactòria d'aquest fenomen.

El sistema predadors-preses

Vers 1925 el conegut matemàtic italià Vito Volterra, incitat per converses amb D'Ancona, va començar a preguntar-se si seria possible de trobar una explicació de les esmentades oscil·lacions mitjançant mètodes matemàtics. Per a les seves consideracions va ser fonamental adonar-se que en la lluita per la supervivència concorrien dues classes de peixos. Per això va agrupar els peixos de l'alt Adriàtic en dues classes, la dels depredadors i la de les preses, i mitjançant un petit nombre de premisses senzilles va derivar un sistema de dues equacions diferencials que descrivien l'evolució temporal d'ambdues poblacions. Una anàlisi d'aquestes equacions mostra un augment i una disminució periòdics dels depredadors i de les preses, variacions que essencialment són de signe contrari per les dues classes. Si a l'instant t representem la població de preses per $p(t)$ i la de depredadors per $d(t)$, podem considerar el parell $P(t) = (p(t), d(t))$ com un punt del pla, el qual en el decurs del temps descriu una corba tancada K en el sentit contrari del de les busques del rellotge (figura 1).

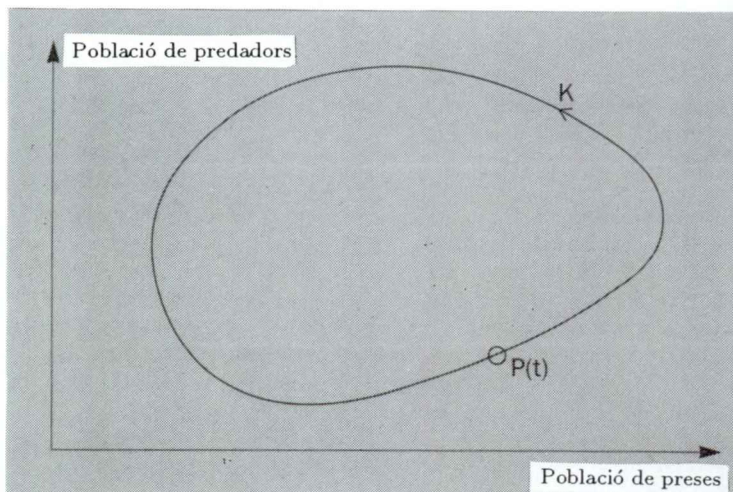


Figura 1

Descoberta la periodicitat mitjançant l'anàlisi matemàtica de les equacions diferencials, aquest estat de coses es pot interpretar fàcilment. Quan el nombre de predadors augmenta, més preses són devorades i, per tant, el seu nombre disminueix. Llavors, havent-hi menys provisions per als predadors, la seva taxa de mortalitat augmenta, amb la qual cosa la seva població disminueix. Com que menys depredadors necessiten menys aliment, la població de preses pot multiplicar-se tranquil·lament, i aquest augment comporta un augment dels predadors. Després d'un cert temps trobarem un alt nombre d'aquests i de les seves preses, amb la qual cosa el cicle pot començar de nou.

Tals oscil·lacions periòdiques en sistemes de predadors-preses s'obtenen d'unes poques hipòtesis naturals sobre la coexistència i les raons de variació de les dues poblacions. És clar així, que apareixeran en qualsevol sistema concurrent que es pugui modelar per equacions similars, independentment de la corresponent interpretació de les variables matemàtiques. En particular, apareixen variacions periòdiques amb independència d'influències externes, com ara les ocasionades per la pesca.

És evident que les influències externes se superposen a les variacions naturals i poden afavorir o perjudicar una o altra població. Així, podria semblar que la intensificació de la pesca perjudicaria les dues poblacions, de forma que la mitjana de predadors i preses disminuirà i el cicle anterior es reprendrà a un punt inferior, això és, amb grandàries d'ambdues poblacions disminuïdes.

No obstant això, l'anàlisi matemàtica de les equacions obtingudes per Volterra mostra que la regla anterior, basada en el sentit comú, és falsa. En efecte, si es redueix la raó de creixement de les dues poblacions en una proporció fixa no gaire gran —com ho comporta una captura equilibrada de totes les espècies—, obtenim el resultat paradoxal constatat segons el qual la mitjana de predadors disminuirà i la de preses augmentarà. Per contra, una reducció de la pesca beneficia els depredadors i disminueix la quota dels peixos comestibles —com, de fet, succeí durant la primera guerra mundial al mar Adriàtic.

Aquest resultat sorprenent i remarcable, conegut com el principi de Volterra, també es va confirmar quan es van introduir els insecticides. Això

vol dir que quan es fa ús de productes per a exterminar insectes que tenen efecte tant sobre els insectes predadors com sobre les seves preses, el creixement de les poblacions d'aquests es veurà afavorit allà on abans era controlat pels seus congèneres. Això es pot il·lustrar amb el cas del pugó del cotó, un insecte que va ser importat d'Austràlia, a través de l'Amèrica del Nord, a la segona meitat del segle passat. Com que a Austràlia arruinava els cultius de llimoners, es va importar també el seu adversari natural, una mena de marieta, i així la seva població es va reduir aviat a un nivell més baix. Amb la introducció del DDT s'esperava fer baixar aquest nivell encara més. El que va passar, però, allà on es va emprar aquest insecticida, fou que el pugó es va multiplicar millor que abans —d'acord amb el principi de Volterra.

El paper dels models matemàtics

El sistema predadors-preses és un model matemàtic molt senzill, i dràsticament simplificat, que avui només té valor històric i com a il·lustració. Malgrat que algunes suposicions que conté no resisteixen una crítica seriosa, és precisament a causa de la seva simplicitat i accessibilitat que pot servir per a perfilar una part del paper que la matemàtica juga en la descripció de fenòmens complexos.

– Els models matemàtics són universals. Es poden aplicar a situacions concretes d'origens diversos, independentment del significat, en cada cas particular, de les variables per investigar. Per exemple, els sistemes de predadors-preses, o les seves generalitzacions i millores, poden contribuir a la comprensió de fenòmens tan diferents com el problema de la pesca ja esmentat, la propagació d'epidèmies o fenòmens de les reaccions químiques.

– Els models matemàtics dirigeixen la mirada sobre el que és essencial i obren un camí envers qüestions pertinents a través de la jungla de la diversitat. Així, per exemple, per a l'aclariment de les observacions de D'Ancona, Volterra va extreure els enunciats que necessitava dividint la totalitat d'éssers marins de l'alt Adriàtic només en dues classes, la dels depredadors i la dels depredats.

– Atès que no es deixen dur a l'error pel sentit comú, els models matemàtics són insuborna-

bles. Poden així conduir a resultats totalment inesperats que permeten que un problema donat es pugui veure amb una llum nova, com ho documenta perfectament el paradoxal principi de Volterra.

La matematització progressiva de les ciències de la natura, i també de la medicina, l'economia i les ciències socials, confronta tot el nostre món de l'experiència a preguntes i models més i més complexos, els quals han d'assolir demandes cada vegada més altes. En el cas del model predadors-preses, ha estat suficient que consideréssim l'evolució temporal de les mitjanes de les dues poblacions, i això ens ha dut a dues senzilles equacions diferencials ordinàries. En models més realistes s'han de considerar també, a més de l'evolució temporal, les interaccions espacials, com ara les dels processos de difusió. Això significa que en lloc d'equacions diferencials ordinàries tindrem equacions diferencials en derivades parcials. El maneig rigorós d'aquestes no és fàcil i és, especialment en el domini de les equacions no lineals, que són les que intervien en gairebé tots els models realistes, l'objecte d'investigacions actuals. Es pot obtenir una idea de l'augment de dificultat, en passar d'equacions diferencials ordinàries a equacions en derivades parcials, si tenim present que en el cas ordinari només s'ha de determinar un nombre finit de quantitats desconegudes (per exemple, la variació temporal de les poblacions de predadors i preses), mentre que en el cas d'equacions en derivades parcials s'han de controlar infinites quantitats (per exemple, la variació temporal de la temperatura a cada punt d'un cos o d'un corrent).

Naturalment, els models matemàtics seriosos de situacions complicades es basen, en gran mesura, sobre lleis físiques conegudes, i no sobre regles del sentit comú, i no els podrem explicar, ni de bon tros, en el marc d'aquest article. No obstant això, intentarem, mitjançant els exemples que segueixen, de proporcionar al lector una introducció a aquesta mena de problemes i al paper que hi juga la matemàtica.

Subministrament d'oxigen als òrgans d'animals de sang calenta

A Dortmund, a l'Institut Max Planck de Fisiologia de Sistemes, s'investiguen els processos d'intercanvi entre els capil·lars i els teixits d'organismes de sang calenta. Per exemple, té interès de

saber sota quines condicions està garantit un subministrament òptim d'oxigen a les *mitochondries*, o com es podria posar remei a una possible deficiència d'aquest subministrament. A tal fi, d'una banda es fan experiments, i de l'altra s'intenta deduir enunciats dels models teòrics. Ocasionalment, per comparació dels resultats dels dos procediments, es poden descobrir propietats del corresponent sistema biològic (figura 2).

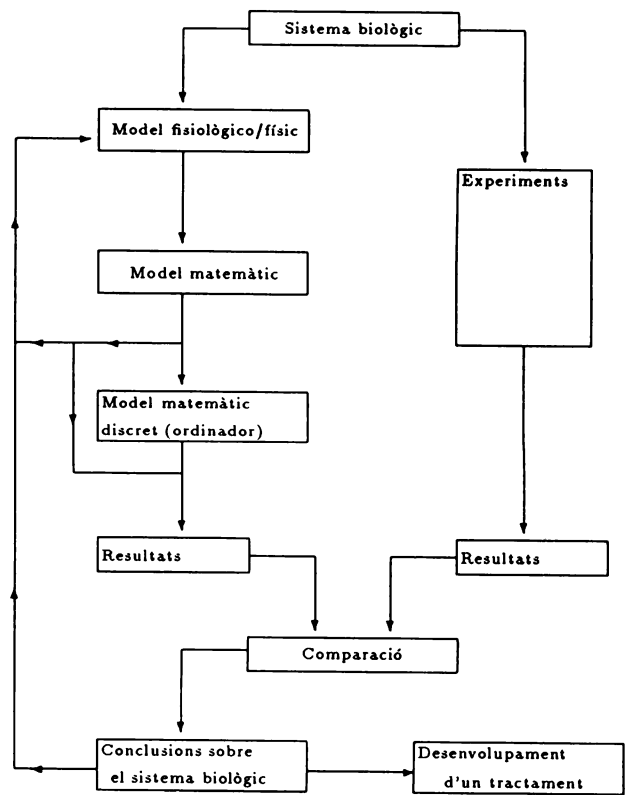


Figura 2

Aquesta forma de procedir és típica de molts dominis en què es volen extreure conclusions de models i experiments. Tot seguit es construeix, a

partir del sistema biològic i regint-se per criteris fisiològics, físics, químics i morfològics, un model fisiològic-físic, de la qual resulta un model matemàtic. En el cas que ens ocupa s'obté un sistema complicat d'equacions en derivades parcials no lineals. Per tal de poder disposar de dades explícites que es puguin comparar amb les dades experimentals, a la pràctica hom es veu forçat, en tots els casos, de recórrer a un altre model que sigui apte per al tractament numèric —el qual es coneix com a model discret.

Les equacions diferencials, especialment si són complicades, en general no es poden resoldre de forma que obtinguem expressions matemàtiques (funcions) que les compleixin i de les quals es pugui inferir tota la informació que desitgem. És un dels mèrits de la matemàtica, però, que faci possible, basant-se en investigacions teòriques, de treure conclusions sobre el comportament de les solucions de les equacions sense necessitat de resoldre-les realment. Les preguntes fonamentals són, sense dubte, les que demanen per a la bona fonamentació i estabilitat dels problemes. Quan hom considera que ja s'ha fet el primer pas, havent produït un model de la realitat, i que, al seu torn, d'aquest s'ha passat a un segon model, el matemàtic, llavors esdevé clar que al llarg del camí hi ha tota mena de perills. Per exemple, un d'ells és considerar certs aspectes com a secundaris i negligir-los en benefici d'un model més senzill, tot i que potser contribueixen indirectament, de forma considerable, al fenomen estudiat. Un altre és el perill de fer suposicions que duen a conseqüències contradictòries que no s'havien pogut preveure en la fase de modelització. Aquests casos es descobriran, en general, en el model matemàtic, el qual llavors contindrà, per exemple, equacions incompletes, o que no tenen solucions o en tenen massa, en una paraula, contindrà equacions mal fonamentades. D'aquesta forma, els sistemes matemàtics inestables es caracteritzen pel fet que petites variacions en els paràmetres (arranjaments experimentals) o en les dades comporten grans desviaments dels resultats corresponents.

Un aclariment satisfactori de qüestions teòriques com aquestes no només té significació pel model fisiològic-físic, el qual s'ha de repensar i modificar si li manca estabilitat o bona fonamentació, sinó també per al tractament numèric de les equacions. Els models realistes generen,

quan es discretitzen, sistemes de moltes equacions amb centenars, per no dir milers, d'incògnites que posen problemes fins i tot als més potents ordinadors d'avui. Un ordinador, en què s'han introduït les dades i els programes de càlcul, (quasi) sempre subministra resultats, val a dir solucions, fins i tot en casos en els quals les equacions inicials no discretitzades no en tenen cap! Quan es considera el nombre astronòmic d'operacions que un superordinador fa per segon i es té en compte que els nombres de l'ordinador només consten d'un petit nombre de dígit, de forma que en cada operació es produeixen errors d'arrodoniment, no és sorprenent que els nombres de sortida puguin trobar-se —fins i tot si es presenten atractivament amb tècniques gràfiques actuals— lluny de la realitat. Aquest és el cas, especialment en els problemes inestables, on petits errors d'arrodoniment poden tenir conseqüències catastròfiques. Quan per recerques teòriques es pot mostrar que les equacions del model matemàtic inicial no són contradictòries i que admeten una solució, i quan a més a més es pot garantir que la solució és única i estable, llavors hem fet un gran pas endavant. De fet, els enunciats d'aquesta mena són fonamentals per a obtenir fites de l'error que ens assegurin que els resultats donats per l'ordinador representen amb bona aproximació la realitat i no una solució il·lusòria.

En el cas de model de transport d'oxigen precedent, algunes de les qüestions matemàtiques esmentades es poden resoldre satisfactòriament. Això es pot atribuir al fet que el model fisiològic/físic es basa sobre la teoria clàssica de la difusió, amb la qual cosa es pot descriure amb una classe d'equacions diferencials que s'han estudiat extensivament en els darrers trenta anys. El cas que segueix, en canvi, és un problema extraordinàriament actual que ens mena fins a teories físiques no clàssiques de la difusió.

Les noves tècniques de medicació

Els mètodes convencionals de tractament de malalties amb medicaments consisteixen predominantment en l'administració de pastilles, pomades, gotes i injeccions intravenoses. En temps recents es treballa intensivament en el desenvolupament de nous mètodes de medicar.

Després d'administrar un medicament per un mètode convencional, en general augmentarà la

seva concentració a la sang, fins a assolir un màxim, i després disminuirà fins a esvair-se. Com que cada medicament té un marge d'efectivitat, per sota de la qual és inofensiu i per sobre tòxic, les oscil·lacions de concentració poden comportar que s'alternin períodes d'intoxicació amb d'altres en que és inoperant.

Les noves tècniques permeten que una única dosi del medicament es lliuri controladament al cos, a una velocitat constant, durant un període prèviament determinat (d'hores, dies o anys) i eviten així les dites oscil·lacions. Permeten també, endemés, localitzar el lliurament a una part determinada del cos, amb la qual cosa és possible evitar que afecti els òrgans veïns sans. Altres profits són la reducció de la necessitat de tractaments continuats, l'augment del benestar general del pacient i l'eliminació dels factors personals (com per exemple, l'administració irregular de pastilles).

Un dels mètodes consisteix a incorporar el medicament en un polímer que després es col·loca al lloc del cos desitjat. Llavors el material polimèric lliura el medicament per difusió, reaccions químiques o processos de dissolució. Per tal de poder controlar la intensitat i duració del lliurament, la bona comprensió dels corresponents processos de difusió té una importància fonamental. Diguem només que es tracta de complicats desgastos pels quals la difusió ocasiona canvis mecànics del polímer, els quals al seu torn repercuteixen sobre els processos de difusió. Avui encara no es disposa de cap teoria física segura d'aquesta difusió visco-elàstica no clàssica en els polímers. És per aquesta raó que s'intenta desenvolupar, a partir de bases fenomenològiques, models matemàtics que permetin descriure aquests processos. Així es van inferir, com ara a l'Institut de Tecnologia de Califòrnia, equacions diferencials que sembla que descriuen, acuradament fins a una certa mesura, almenys alguns d'aquests nous processos de difusió. De fet, es tracta d'una classe d'equacions que fins ara no s'ha investigat en la literatura matemàtica.

Per tal d'examinar la qualitat d'aquests models s'han fet càlculs numèrics extensius. Per reduir la complexitat de les equacions, a fi de mantenir el cost dels càlculs dins d'una fita raonable, es van fer una sèrie de suposicions simplificadores. Mentre que els tests numèrics sobre les equacions simplifi­cades semblava que proporcionaven els efectes

desitjats, mitjançant una anàlisi matemàtica es va poder mostrar que les solucions de les esmentades equacions simplifi­cades no podien tenir de cap manera les propietats esperades, de forma que el model havia esdevingut irreal per l'oblit de termes essencials. Així, que hom hagué d'entendre's directament amb les equacions complicades, de les quals entretant, es va poder demostrar que estaven ben fonamentades.

Repercussions sobre la matemàtica

Naturalment, només es tracta d'haver ofert, amb els exemples que hem escollit, una petita mostra del vast domini de la interacció de la matemàtica amb altres disciplines científiques. Aquests contactes han estat sempre, en el decurs de la llarga història de les matemàtiques, d'una fertilitat extraordinària. Van impulsar el desenvolupament de disciplines matemàtiques senceres, les quals van ser investigades i reconstruïdes pel seu interès purament matemàtic, per una curiositat intel·lectual del tot aliena a cap aplicació concreta, només per constatar després de forma inesperada que tenien noves aplicacions a altres dominis. D'aquesta manera contribueixen considerablement al manteniment de la vivacitat i força d'aquesta antiga ciència.

Referències

1. R. Langer, *New methods in drug delivery*, Science, vol. 249, 1990, p. 1527-1533.